Kandidatarbete

Zakbaser

Av:
Emma Jakobsson

Handledare:
Ingemar Bengtsson

Sammanfattning

Inom kvantmekaniken används oftast x- eller p-representationen för att beskriva kvantmekaniska tillstånd. I det här arbetet kommer en alternativ bas i det oändligtdimensionella Hilbertrummet beskrivas. Denna baseras på de två koordinaterna q och k, vilka motsvarar position respektive rörelsemängd kända så när som på en additativ multipel av en konstant. Denna representation introducerades av den israeliske fysikern Joshua Zak och kallas således Zakrepresentationen.

Hos Zaktillstånden är väntevärdena av position och rörelsemängd odefinierade och följaktligen är osäkerheterna hos dessa godtyckligt stora. Detta föranleder en jämförelse med koherenta tillstånd, vilka minimerar produkten i Heisenbergs osäkerhetsrelation. Denna skillnad till trots kommer vi se att dessa två typer av tillstånd skapas av snarlika operatorer.

Slutligen ges ett konkret exempel på hur Zakrepresentationen kan användas för att visa hur koherenta tillstånd på ett gitter i fasrummet utgör en fullständig bas.

Zak bases

The most often used representations in quantum mechanics are the x- and p-representations. In this paper an alternative basis in the infinite dimensional Hilbert space will be described. This basis is specified by the coordinates q and k, representing position and momentum respectively, although only known within an additative multiple of a constant. This basis was first introduced by the Israeli phycisist Joshua Zak and is therefore called the Zak basis.

In the Zak representation the expectation values of position and momentum are undefined and accordingly the uncertainties of these are arbitrarily large. This motivates a comparison with coherent states, which minimize the product of these uncertainties in the Heisenberg uncertainty relation. Despite of this difference between the two types of states, we will see that they are built up by similar operators.

Finally the Zak representation will be used to prove the completeness of coherent states on a phase plane lattice.

Innehåll

1 Inledning

I vår vardag är vi vana vid föremål såsom bollar, klossar och dylikt. Dessa föremål är för oss konkreta; vi kan se dem, vi kan ta på dem och vi har en känsla för hur de kommer bete sig. En intuition grundad på erfarenhet. I jämförelse med de beståndsdelar som bygger upp dessa föremål, är bollarna och klossarna makroskopiska system. När vi försöker visualisera de små beståndsdelarna, såsom elektroner och protoner, tänker vi gärna på dem som om de vore små bollar. Men en elektron eller en proton beter sig inte som en boll. Vi måste ta till kvantmekanik för att beskriva dem. Vi säger att en partikel befinner sig i ett visst kvantmekaniskt tillstånd.

1.1 Representationer inom kvantmekaniken

Låt $|\psi\rangle$ beteckna något kvanttillstånd. Detta $|\psi\rangle$ ses som en vektor i Hilbertrummet, vilket är det rum som utgörs av alla kvadratiskt integrerbara funktioner. Vi kan t.ex. välja att beskriva tillståndet $|\psi\rangle$ som en funktion av positionen x, genom att beräkna den inre produkten

$$\langle x|\,\psi\rangle = \psi(x), \tag{1.1}$$

där tillståndet $|x\rangle$ är egentillstånden till $\hat{x}$-operatorn. Dessa har egenvärdena x, dvs

$$\hat{x}\,|x\rangle = x\,|x\rangle\,. \tag{1.2}$$

Tillstånden $|x\rangle$ är inte normerbara, vilket innebär att de inte bebor Hilbertrummet, och representerar därför inte ett möjligt fysikaliskt tillstånd. Men de utgör ändå en bas i det oändligtdimensionella Hilbertrummet. De är ortogonala, ty

$$\langle x|\,x'\rangle = \delta(x - x'), \tag{1.3}$$

och fullständiga, då

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,|x\rangle\,\langle x| = \mathbb{1}. \tag{1.4}$$

Att dessa tillstånd utgör en fullständig ortogonal bas enligt ekvationerna (1.3) och (1.4), innebär att varje godtyckligt tillstånd $|\psi\rangle$ kan beskrivas som en funktion av x enligt ekvation (1.1). Denna funktion, även kallad vågfunktionen, är sannolikhetsamplituden att finna en partikel i tillståndet ψ i positionen x.

Alternativt kan vi välja att uttrycka ett kvanttillstånd som en funktion av rörelsemängden p:

$$\tilde{\psi}(p) = (p|\,\psi\rangle. \tag{1.5}$$

Här betecknas egentillstånden till $\hat{p}$-operatorn $|p)$[1], för vilka gäller att $\hat{p}\,|p) = p\,|p)$. Liksom alla tillstånd kan beskrivas som en funktion av positionen x kan

[1] Valet av notation här kommer att få sin förklaring i avsnitt 3.3, där vi behöver kunna skilja egentillstånden till $\hat{p}$-operatorn från egentillstånden till $\hat{x}$-operatorn.

de också väljas att beskrivas som en funktion av rörelsemängden p, då även tillstånden $|p)$ är ortogonala,

$$(p|\, p') = \delta(p - p'), \tag{1.6}$$

och fullständiga,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp\, |p)\,(p| = \mathbb{1}, \tag{1.7}$$

och därmed uppfyller kraven på en fullständig ortogonal bas.

1.2 Fouriertransformation

Vi kan alltså välja att beskriva ett tillstånd ψ som antingen en funktion av positionen x eller rörelsemängden p. Förhållandet mellan dessa två representationer ges av Fouriertransformation. Enligt ekvation (1.7) har vi

$$\langle x|\, \psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \langle x|\, p)\,(p|\, \psi\rangle. \tag{1.8}$$

Eller som vi är vana vid att se det uttryckt

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{ipx} \tilde{\psi}(p), \tag{1.9}$$

vilket vi får då den inre produkten $\langle x|\, p)$ ges av

$$\langle x|\, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx}. \tag{1.10}$$

Ekvationen ovan talar således om för oss hur vi gör transformationen $\psi(x) \leftrightarrow \tilde{\psi}(p)$. I samtliga ekvationer ovan har Plancks konstant $\hbar$ för enkelhetens skull satts lika med ett, vilket även fortsättningsvis kommer gälla.

1.3 Operatorerna $\hat{x}$ och $\hat{p}$

Med hjälp av Fouriertransformation kan vi ta reda på hur operatorerna $\hat{p}$ och $\hat{x}$ ser ut i x- respektive p-representationerna. Vi får

$$\hat{p} = -i\frac{d}{dx} \tag{1.11}$$

$$\hat{x} = i\frac{d}{dp}. \tag{1.12}$$

Operatorn $\hat{x}$ sägs utgöra en fullständig uppsättning kommuterande operatorer. Detta innebär att alla operatorer som kommuterar med $\hat{x}$, nödvändigtvis är funktioner av x, och är en förutsättning för att dess egentillstånd ska kunna utgöra en fullständig bas. På samma sätt utgör även operatorn $\hat{p}$ en fullständig uppsättning kommuterande operatorer. Operatorerna $\hat{x}$ och $\hat{p}$ kommuterar således inte med varandra. Vi har

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i, \tag{1.13}$$

vilket man lätt kommer fram till med hjälp av ekvationerna (1.11) och (1.12). Att kommutatorn ovan ser ut som den gör är något vi kommer ha anledning att återkomma till senare.

1.4 Heisenbergs osäkerhetsrelation

Som en följd av att operatorerna $\hat{x}$ och $\hat{p}$ inte kommuterar, kan inte position och rörelsemängd vara exakt bestämda samtidigt. Rent konkret ser vi detta om vi, givet en vågfunktion $\psi(x)$, beräknar osäkerheten Δx i positionen, som ges av

$$(\Delta x)^2 = \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2, \tag{1.14}$$

och sedan gör motsvarande räkning för Δp. Resultatet kommer aldrig bli annat än $\Delta x \Delta p \neq 0$. Om vi för en godtycklig hermitsk operator $\hat{A}$ (dvs. en operator som svarar mot någon observerbar storhet, för vilken gäller att $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$) definierar operatorn

$$\hat{\Delta A} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle, \tag{1.15}$$

så gäller generellt att

$$\langle (\hat{\Delta A})^2 \rangle \langle (\hat{\Delta B})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|^2, \tag{1.16}$$

där även $\hat{B}$ är en hermitsk operator. Detta visas i Appendix A.1. Speciellt får vi i fallet med position och rörelsemängd, där kommutatorn ges av ekvation (1.13),

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}. \tag{1.17}$$

Detta är Heisenbergs osäkerhetsrelation.

Syftet med det här arbetet är att beskriva en alternativ bas i det oändligtdimensionella Hilbertrummet. Här utgörs basen av tillstånden $|q, k\rangle$, där koordinaterna q och k motsvarar position och rörelsemängd kända så när som på en additativ multipel av en konstant. Det intressanta här är att vi har en uppsättning tillstånd som är funktioner av två variabler vilka upptar punkter på en torus, snarare än tillstånd som är funktioner av en variabel som antar värden på den reella tallinjen, vilket är fallet i x- och p-representationerna. Dessa tillstånd kallas Zaktillstånd efter den israeliske fysikern Joshua Zak som var först med att introducera dem [1, 2, 3].

2 Elektroner i periodiska potentialer

Ursprungligen introducerades Zakrepresentationen som ett praktiskt sätt att beskriva elektroners rörelse i fasta material. I fasta material sitter ofta atomkärnorna ordnade i ett regelbundet mönster, ett gitter, och elektroner som rör sig i materialet känner av en elektrisk potential från dessa atomkärnor. Låt oss därför börja med att ta en titt på Blochmodellen som grundar sig på rörelsen hos en laddad partikel i en periodisk potential.

2.1 Translationsoperatorn

Vi börjar med att introducera operatorn

$$\hat{T}(a) = e^{i\hat{p}a}. \tag{2.1}$$

Denna är en translationsoperator, då den genererar en translation a i x-koordinaten på följande vis:

$$\hat{T}(a)f(x) = f(x+a). \tag{2.2}$$

För att visa detta börjar vi med att titta närmare på operatorn $\hat{T}(a)$. Vi har att

$$\hat{T}(a) = e^{i\hat{p}a} = e^{a\frac{d}{dx}}, \tag{2.3}$$

då operatorn $\hat{p}$ i x-representationen ges av ekvation (1.11) på sida 7. Vi har nu

$$\begin{aligned} e^{a\frac{d}{dx}} &= 1 + a\frac{d}{dx} + \frac{a^2}{2!}\frac{d^2}{dx^2} + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

I vänsterledet i ekvation (2.2) står alltså

$$\hat{T}(a)f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n} f(x), \tag{2.5}$$

vilket inte är något annat än Taylorutvecklingen av $f(x+a)$. Så om funktionen $f(x)$ är sådan att Taylorsumman ovan konvergerar mot $f(x+a)$ ser vi att (2.2) gäller.

2.2 Blochs teorem

Låt oss betrakta en elektron som befinner sig i en potential med perioden a. Det kan exempelvis vara ett gitter av atomkärnor i ett fast material, där varje atomkärna befinner sig på avståndet a från sina närmaste grannar. Detta innebär att Hamiltonoperatorn $\hat{H}$ är periodisk i x med perioden a, och således kommuterar med translationsoperatorn $\hat{T}(a)$. Det ser vi om vi verkar med kommutatorn

$[\hat{H}(\hat{x},\hat{p}),\hat{T}(a)]$ på en testfunktion $f(x)$:

$$
\begin{aligned}
[\hat{H}(\hat{x},\hat{p}),\hat{T}(a)]f(x) &= \hat{H}(\hat{x},\hat{p})\hat{T}(a)f(x) - \hat{T}(a)\hat{H}(\hat{x},\hat{p})f(x) \\
&= \hat{H}(\hat{x},\hat{p})f(x+a) - \hat{H}(\hat{x}+a,\hat{p})f(x+a) = 0, \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

då Hamiltonoperatorn är periodisk i x. Detta innebär att det finns en uppsättning tillstånd som är egentillstånd till såväl Hamiltonoperatorn som translationsoperatorn, som utgör en fullständig bas i Hilbertrummet.

Enligt Blochs teorem kan då varje sådan egenfunktion, låt oss kalla den $\phi(x)$, skrivas på formen

$$\phi(x) = e^{ikx}u(x), \tag{2.7}$$

där $k \in [0, 2\pi/a)$ och funktionen $u(x)$ har perioden a. Beviset, som det presenteras av G. Lindblad [4], är enkelt. Antag att $\phi(x)$ är egenfunktion till $\hat{T}(a)$ med egenvärdet $e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0, 2\pi)$:

$$
\begin{aligned}
\hat{T}(a)\phi(x) &= \phi(x+a) \\
&= e^{i\alpha}\phi(x). \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

Vi ser då att funktionen

$$u(x) = e^{-i\alpha x/a}\phi(x) \tag{2.9}$$

är periodisk med perioden a. Följaktligen kan $\phi(x)$ skrivas på formen (2.7) med $k = \alpha/a$. Eftersom α tillhör intervallet $[0, 2\pi)$, väljer vi k på intervallet $[0, 2\pi/a)$. Rörelsemängden p ges då av $k + n2\pi/a$, för något $n \in \mathbb{Z}$.

Som vi såg i avsnitt 1.1 utgör egentillstånden till operatorn $\hat{x}$ en fullständig bas, liksom egentillstånden till $\hat{p}$-operatorn. Detsamma gäller inte för de tillstånd som endast är egentillstånd till translationsoperatorn $\hat{T}(a)$. Våra $\phi(x)$ utgör en fullständig bas om de samtidigt bestäms av att de är egenfunktioner till Hamiltonoperatorn, vilket är möjligt endast då Hamiltonoperatorn kommuterar med translationsoperatorn. Translationsoperatorn och Hamiltonoperatorn utgör tillsammans en fullständig uppsättning kommuterande operatorer.

3 Zakbaser

Låt oss behålla fokus på translationsoperatorn $\hat{T}(a)$. I föregående avsnitt utnyttjades att translationsoperatorn kommuterar med Hamiltonoperatorn om denna är periodisk, och ett generellt uttryck för deras gemensamma egenfunktioner härleddes. Vi kommer här dock välja att gå en annan väg och frågar oss om vi kan hitta en annan operator som kommuterar med $\hat{T}(a)$, så att deras gemensamma egentillstånd utgör en bas.

3.1 Operatorn $\hat{S}(b)$

Betrakta följande operator, låt oss kalla den $\hat{S}(b)$:

$$\hat{S}(b) = e^{i\hat{x}b}. \tag{3.1}$$

Vi ser att helt analogt med operatorn $\hat{T}(a)$ genererar denna en translation $-b$ i p-representationen, då operatorn $\hat{x}$ i denna representation ges av ekvation (1.12) på sida 7.

Enligt Baker-Hausdorffs formel gäller för två operatorer $\hat{A}$ och $\hat{B}$ som båda kommuterar med kommutatorn $[\hat{A}, \hat{B}]$ att

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{[\hat{A},\hat{B}]}e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}, \tag{3.2}$$

vilket visas i Appendix A.2. Detta ger, tillsammans med att $[\hat{p}, \hat{x}] = -i$, att

$$\begin{aligned} \hat{T}(a)\hat{S}(b) &= e^{i\hat{p}a}e^{i\hat{x}b} \\ &= e^{iab}e^{i\hat{x}b}e^{i\hat{p}a} \\ &= e^{iab}\hat{S}(b)\hat{T}(a). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Vi ser i ekvation (3.3) att för $ab = 2\pi$ gäller $[\hat{T}(a), \hat{S}(b)] = 0$, och vi definierar därför konstanten b som $b \equiv 2\pi/a$.

Att operatorerna $\hat{T}(a)$ och $\hat{S}(b)$ kommuterar är alltså en följd av att $[\hat{x}, \hat{p}] = i$. Generellt kan vi för två operatorer $\hat{C}$ och $\hat{D}$, för vilka gäller att $[\hat{C}, \hat{D}] = i$, alltid välja en godtycklig konstant a och definiera operatorerna $\hat{T}(a)$ och $\hat{S}(2\pi/a)$.

3.2 Zakbaser

Som vi redan vet är funktionen $\phi(x)$ på formen (2.7) på sida 10 en allmän egenfunktion till $\hat{T}(a)$ med egenvärden e^{ika}, $k \in [0, b)$. Vi frågar oss hur funktionen $u(x)$ i ekvation (2.7) ska se ut för att ϕ även ska vara en egenfunktion till $\hat{S}(b)$.

Vi noterar att egentillståndet $|q\rangle$ till operatorn $\hat{x}$, med egenvärden q, även är egentillstånd till $\hat{S}(b)$:

$$e^{i\hat{x}b}\,|q\rangle = e^{iqb}\,|q\rangle\,, \quad q \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Vi kan välja q på intervallet $[0, a)$, och då gäller

$$e^{i\hat{x}b}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|q + na\rangle = e^{iqb}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|q + na\rangle\,, \quad q \in [0, a). \tag{3.5}$$

Nu var det en funktion av x vi var ute efter, så låt oss skriva dessa egentillstånd som funktioner av x:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle x|\, q + na\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta(x - q - na), \tag{3.6}$$

enligt ekvation (1.3) på sida 6. Funktionen (3.6) ovan uppfyller de krav vi ställde på funktionen $u(x)$; den är periodisk med perioden a. Insättning i ekvation (2.7) ger att funktionen

$$\phi(x) = f(q, k)\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{ikna}\delta(x - q - na), \tag{3.7}$$

där funktionen $f(q,k)$ innehåller en normeringskonstant och en eventuell fasfaktor, är egenfunktion till såväl $\hat{T}(a)$ som $\hat{S}(b)$. Vi kan välja att beteckna våra egentillstånd $|q,k\rangle$. Då ekvation (3.7) är uttrycket för dessa tillstånd som funktion av x, dvs den inre produkten $\langle x|\, q,k\rangle$, ser vi att

$$|q,k\rangle = f(q,k)\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{ikna}\,|q+na\rangle\,. \tag{3.8}$$

Ovanstående uttryck ger oss verktyget att beskriva ett tillstånd $|\psi\rangle$ som en funktion av q och k. Låt oss kalla denna funktion $\varphi(q,k) \equiv \langle q,k|\,\psi\rangle$. Vi har

$$\begin{aligned}\varphi(q,k) &= \langle q,k|\,\psi\rangle \\ &= f^*(q,k)\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-ikna}\,\langle q+na|\,\psi\rangle \\ &= f^*(q,k)\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-ikna}\psi(q+na).\end{aligned} \tag{3.9}$$

Här har vi alltså en vågfunktion av två koordinater, q och k. Vi kan se det som att punkterna (q,k) ligger på den rektangel i fasrummet vars sidor har längderna a och b och vars area är $ab = 2\pi$. Denna rektangel täcker förstås inte alla punkter i fasrummet. Då ett tillstånd med positionen x i Zakrepresentationen beskrivs av samma koordinat q som det tillstånd med positionen $x+a$, vore det bättre att sluta rektangeln till en cylinder, så att varje förflyttning a längs x-axeln motsvarar ett varvs förflyttning runt cylindern. Dock har vi även en periodicitet i rörelsemängden p, vilket betyder att punkterna (q,k) bäst beskrivs som punkter på en torus, som ju har två periodiciteter. Perioderna bestäms av konstanten a, så låt oss kalla denna torus $\tau(a)$.

Det återstår att normera tillstånden (3.8) och att visa att dessa utgör en fullständig ortogonal bas. Första steget är att visa att varje $|\psi\rangle$ i Hilbertrummet kan uttryckas i basen $|q,k\rangle$, dvs att

$$\iint_{\tau(a)} dq\, dk\, |q,k\rangle\,\langle q,k| = \mathbb{1}. \tag{3.10}$$

Låt oss applicera operatorn ovan på den inre produkten $\langle\psi|\,\psi\rangle$. Med hjälp av ekvation (3.9) har vi

$$\begin{aligned}&\iint_{\tau(a)} dq\, dk\, \langle\psi|\, q,k\rangle\,\langle q,k|\,\psi\rangle \\ &= |f(q,k)|^2 \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \iint_{\tau(a)} dq\, dk\, e^{ik(n-m)a}\psi^*(q+na)\psi(q+ma) \\ &= b\,|f(q,k)|^2 \sum_{n} \int_0^a dq\, \psi^*(q+na)\psi(q+na).\end{aligned} \tag{3.11}$$

Sista steget ovan följer av att integralen över k endast ger något bidrag för de termer i dubbelsumman där $n = m$. Faktorn $|f(q,k)|$ kan lyftas ur integralen då denna är en konstant. Vi har nu en summa av integraler från $q = 0$ till $q = a$ över funktionen $\psi(q + na)$ för alla $n \in \mathbb{Z}$. Vi kan med andra ord uttrycka detta som en integral över hela reella tallinjen:

$$\begin{aligned} \iint_{\tau(a)} dq\, dk\, \langle\psi|\, q, k\rangle \langle q, k|\, \psi\rangle &= b\, |f(q, k)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dq\, \psi^*(q)\psi(q) \\ &= b\, |f(q, k)|^2 \langle\psi|\, \psi\rangle. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Sista steget följer av ekvation (1.4) på sida 6. Låter vi $f(q, k) = \frac{1}{\sqrt{b}}$ gäller alltså ekvation (3.10).

Vidare ger en räkning, liknande den ovan, att

$$\iint_{\tau(a)} dq\, dk\, \langle q', k'|\, q, k\rangle \varphi(q, k) = \varphi(q', k'), \tag{3.13}$$

vilket visar att

$$\langle q', k'|\, q, k\rangle = \delta(q' - q)\delta(k' - k). \tag{3.14}$$

Sammanfattningsvis har vi nu, genom att visa ekvationerna (3.10) och (3.14), visat att tillstånden

$$|q, k\rangle = \frac{1}{\sqrt{b}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{ikna}\, |q + na\rangle \tag{3.15}$$

utgör en fullständig ortonormal bas. Ett godtyckligt tillstånd $|\psi\rangle$ kan uttryckas i denna bas givet av

$$\varphi(q, k) = \frac{1}{\sqrt{b}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-ikna} \psi(q + na). \tag{3.16}$$

Dessa är egentillstånd till operatorerna $\hat{T}(a)$ och $\hat{S}(b)$.

3.3 Operatorerna $\hat{x}$ och $\hat{p}$ i Zakrepresentationen

I avsnitt 3.2 såg vi att varje tillstånd $|\psi\rangle$ kan beskrivas som en funktion av koordinaterna q och k. Ekvation (3.15) ger oss verktyget för att göra transformationen $\psi(x) \leftrightarrow \varphi(q, k)$. Låt oss kalla detta en Zaktransformation.

Liksom ekvation (1.10) på sida 7 innehåller information om hur vi gör en Fouriertransformation har vi, givet av ekvation (3.15),

$$\langle x|\, q, k\rangle = \frac{1}{\sqrt{b}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{ikna} \delta(x - q - na), \tag{3.17}$$

som talar om hur vi gör en Zaktransformation. Det intressanta med den här transformationen är att den är bijektiv. För varje funktion $\psi(x)$, finns en motsvarande funktion $\varphi(q, k)$ som beskriver exakt samma tillstånd, och tvärtom. Men medan den ena funktionen, ψ, är en funktion av positionen x, vars värden ligger på den reella tallinjen, är den andra, φ, en funktion av två variabler, q och k, vilka utgör punkter på torusen $\tau(a)$.

Liksom Fouriertransformation av operatorerna $\hat{x}$ och $\hat{p}$ ger ekvationerna (1.11) och (1.12), kan vi ta reda på hur samma operatorer ser ut i Zak-representationen. Vi börjar med operatorn $\hat{x}$, genom att ta hjälp av x-representationen:

$$\begin{aligned}
\hat{x}\varphi(q,k) &= \langle q,k|\,\hat{x}\,|\psi\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\langle q,k|\,\hat{x}\,|x\rangle\,\langle x|\,\psi\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\,x\,\langle q,k|\,x\rangle\,\langle x|\,\psi\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{b}}\int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-ikna} x\delta(x-q-na)\psi(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{b}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-ikna}(q+na)\psi(q+na) \\
&= (q+i\frac{\partial}{\partial k})\varphi(q,k). \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Av räkningarna ovan ser vi att när operatorn $\hat{x}$ verkar på ett tillstånd $\varphi(q,k)$, är det detsamma som att verka med operatorn $\hat{q}+i\partial/\partial k$ på detta tillstånd.

Motsvarande räkning för $\hat{p}$-operatorn ger

$$\begin{aligned}
\hat{p}\,\varphi(q,k) &= \langle q,k|\,\hat{p}\,|\psi\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\langle q,k|\,x\rangle\,\langle x|-i\frac{d}{dx}\,|\psi\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{b}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-ikna}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\delta(x-q-na)(-i)\frac{d\psi}{dx} \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Utför vi här en partiell integration, finner vi att då $\lim_{x\to\pm\infty}\psi(x)=0$, vilket måste gälla då $\psi(x)$ är normerbar, återstår endast en term. Vi har

$$\begin{aligned}
\hat{p}\,\varphi(q,k) &= \frac{i}{\sqrt{b}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-ikna}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-q-na)\psi(x) \\
&= \frac{-i}{\sqrt{b}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-ikna}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{\partial}{\partial q}\delta(x-q-na)\psi(x) \\
&= -i\frac{\partial}{\partial q}\varphi(q,k). \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

Här har utnyttjats att för deltafunktionen gäller

$$\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x') = -\frac{\partial}{\partial x'}\delta(x-x'), \qquad (3.21)$$

se Appendix A.3.1 för bevis. Sammanfattningsvis har vi för operatorerna $\hat{x}$ och $\hat{p}$ i Zakrepresentationen:

$$\hat{x} = \hat{q} + i\partial/\partial k, \qquad (3.22)$$

$$\hat{p} = -i\partial/\partial q. \qquad (3.23)$$

Det kan tyckas lite lustigt att uttrycken för dessa operatorer är asymmetriska. Vi provar att närma oss problemet från ett annat håll, och ser vad som händer.

I avsnitt 3.2 härleddes uttrycket för tillstånden $|q,k\rangle$ genom att utgå från tillstånden $|x\rangle$. Det påpekas av Arvind m fl. [5] att vi lika gärna skulle kunna utgå från egentillstånden $|p)$ till $\hat{p}$-operatorn och komma fram till att tillstånden

$$|q,k) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-iqnb} \, |k+nb) \tag{3.24}$$

är egentillstånd till operatorerna $\hat{T}(a)$ och $\hat{S}(b)$, vilket lätt kan prövas. Denna bas är likvärdig basen $|q,k\rangle$ som vi tidigare arbetat med.

Så hur förhåller sig basen $|q,k)$ till basen $|q,k\rangle$? Vi har enligt ekvationerna (3.15) och (3.24)

$$\begin{aligned}
\langle q',k' |\, q,k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} e^{-ik'na} e^{-iqmb} \, \langle q'+na |\, k+mb) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} e^{-ik'na} e^{-iqmb} e^{i(q'+na)(k+mb)} \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{iq'k} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i(k-k')na} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{i(q'-q)mb} \\
&= e^{iqk} \delta(k'-k)\delta(q'-q).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

I räkningarna ovan har använts att

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx}, \tag{3.26}$$

uttryckt som en Fourierserie, och

$$\delta(cx) = \frac{1}{|c|} \delta(x), \tag{3.27}$$

där c är någon (nollskild) reell konstant. Det senare förhållandet visas i Appendix A.3.2. Ekvation (3.25) antyder att

$$|q,k) = e^{iqk} \, |q,k\rangle \, , \tag{3.28}$$

då tillstånden $|q,k\rangle$ är ortogonala enligt ekvation (3.14). De två baserna $|q,k\rangle$ och $|q,k)$ skiljer sig alltså åt med en fasfaktor. En konsekvens av denna fasskillnad ser vi om vi nu beräknar operatorerna $\hat{x}$ och $\hat{p}$ i basen $|q,k)$. Vi får

$$\hat{x} = i\partial/\partial k \tag{3.29}$$

$$\hat{p} = \hat{k} - i\partial/\partial q. \tag{3.30}$$

En jämförelse med uttrycken för samma operatorer i ekvationerna (3.22) och (3.23) visar att valet av fas för tillstånden $|q,k\rangle$ och $|q,k)$ är avgörande för hur operatorerna $\hat{x}$ och $\hat{p}$ ser ut i Zakrepresentationen. Dessa behöver inte vara asymmetriska i q och k om fasen väljs på rätt sätt.

4 Koherenta tillstånd

En intressant egenskap hos tillstånden $|q,k\rangle$ är att väntevärdena av positionen x och rörelsemängden p är helt odefinierade. Koordinaterna q och k ger viss information om position respektive rörelsemängd, men säger inget om vilket intervall som är mest sannolikt. Osäkerheterna i dessa storheter är således godtyckligt stora. Detta motiverar en jämförelse med en annan typ av tillstånd, de koherenta tillstånden, som minimerar produkten mellan osäkerheterna Δx och Δp i Heisenbergs osäkerhetsrelation. Dessa beskrivs av såväl Leonhardt [6] som Bengtsson och Życzowski [7].

4.1 Definition

Först tar vi en titt på hur de koherenta tillstånden byggs upp. De koherenta tillstånden är egentillstånd till förintelseoperatorn $\hat{a}$. Beteckna de koherenta tillstånden $|z\rangle$ och vi får

$$\hat{a}\,|z\rangle = z\,|z\rangle\,, \tag{4.1}$$

där z är något komplext egenvärde till det koherenta tillståndet. Skapelse- och förintelseoperatorerna definieras som vanligt som

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p}), \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}), \tag{4.2}$$

för vilka gäller

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \tag{4.3}$$

Nu introducerar vi förflyttningsoperatorn $\hat{D}(z)$:

$$\hat{D}(z) = e^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}}. \tag{4.4}$$

För denna gäller

$$\hat{D}^\dagger(z)\hat{a}\hat{D}(z) = \hat{a} + z. \tag{4.5}$$

Detta visas genom att betrakta en infinitesimal förflyttning δz. Taylorutveckling av $\hat{D}(\delta z)$ ger i första ordningen av δz

$$\hat{D}(\delta z) = 1 + \delta z\hat{a}^\dagger - \delta z^*\hat{a}, \tag{4.6}$$

vilket, om vi ignorerar högre ordningar av δz, ger

$$\begin{aligned}\hat{D}^\dagger(\delta z)\hat{a}\hat{D}(\delta z) &= \hat{a} + [\hat{a}, \hat{a}^\dagger\delta z - \hat{a}\delta z^*] \\ &= \hat{a} + \delta z.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Sista steget följer av ekvation (4.3). Då $\hat{D}(z) = \prod \hat{D}(\delta z)$, med $z = \sum \delta z$, och eftersom operatorn $\hat{D}$ är unitär, dvs

$$\hat{D}(z)\hat{D}^\dagger(z) = \mathbb{1}, \tag{4.8}$$

kan denna infinitesimala förflyttning utföras upprepade gånger och vi får att ekvation (4.5) gäller.

Definiera nu vakuumtillståndet $|0\rangle$ som det tillstånd för vilket gäller

$$\hat{a}\,|0\rangle = 0. \tag{4.9}$$

Enligt ekvationerna (4.5) och (4.8) har vi

$$\begin{aligned}\hat{a}\hat{D}(-z)\,|z\rangle &= \hat{D}(-z)\hat{D}^\dagger(-z)\hat{a}\hat{D}(-z)\,|z\rangle \\ &= \hat{D}(-z)(\hat{a}-z)\,|z\rangle\,,\end{aligned} \tag{4.10}$$

vilket måste vara lika med noll enligt definitionen (4.1) av de koherenta tillstånden. Med andra ord måste vakuumtillståndet $|0\rangle$ vara lika med just $\hat{D}(-z)\,|z\rangle$. De koherenta tillstånden kan således skrivas som

$$|z\rangle = \hat{D}^\dagger(-z)\,|0\rangle = \hat{D}(z)\,|0\rangle\,. \tag{4.11}$$

Nu går vi vidare genom att med hjälp av Baker-Hausdorffs formel skriva om uttrycket för $\hat{D}(z)$ som

$$\hat{D}(z) = e^{-|z|^2/2}e^{z\hat{a}^\dagger}e^{-z^*\hat{a}}. \tag{4.12}$$

Den tredje faktorn i uttrycket ovan har ingen verkan på vakuumtillståndet. Enligt definitionen (4.9) av vakuumtillståndet försvinner alla termer i Taylorutvecklingen av denna faktor, utom den inledande ettan. Vi har alltså

$$\begin{aligned}\hat{D}(z)\,|0\rangle &= e^{-|z|^2/2}e^{z\hat{a}^\dagger}\,|0\rangle \\ &= e^{-|z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z\hat{a}^\dagger)^n}{n!}\,|0\rangle\,.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Här känner vi igen uttrycket för tillstånden $|n\rangle$ för en harmonisk oscillator. Dessa tillstånd skapas utifrån vakuumtillståndet med hjälp av skapelseoperatorn:

$$|n\rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle\,. \tag{4.14}$$

De är egentillstånd till operatorn $\hat{a}^\dagger\hat{a}$. Vi drar oss till åminnes att för dessa gäller

$$\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| = \mathbb{1}, \tag{4.15}$$

$$\langle m|\,n\rangle = \delta_{mn}, \tag{4.16}$$

$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,, \tag{4.17}$$

$$\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,. \tag{4.18}$$

Här betecknar δ_{mn} som brukligt Kroneckerdeltat, för vilket gäller

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{för } m = n \\ 0 & \text{för } m \neq n \end{cases}. \tag{4.19}$$

Kombinerar vi nu ekvationerna (4.13) och (4.14) får vi

$$|z\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle . \tag{4.20}$$

Ovan har vi nu de koherenta tillstånden uttryckta i det komplexa talet z, som är egenvärde till förintelseoperatorn.

Låt oss dela upp detta komplexa tal i dess reella och imaginära del:

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 + ip_0), \tag{4.21}$$

och använda definitionen (4.2) av skapelse- och förintelseoperatorerna. Vi får att operatorn $\hat{D}(z)$ motsvarar

$$\hat{U}(x_0, p_0) = e^{i(p_0\hat{x} - x_0\hat{p})}. \tag{4.22}$$

Vi kan välja att beteckna våra koherenta tillstånd $|x_0, p_0\rangle$, som definieras av

$$|x_0, p_0\rangle = \hat{U}(x_0, p_0)\, |0\rangle , \tag{4.23}$$

enligt ekvation (4.11). Varje koherent tillstånd definieras därmed av en punkt (x_0, p_0) i ett tvådimensionellt plan, inte helt olikt vad vi från den klassiska mekaniken känner som fasrummet.

4.2 Egenskaper

Vilka egenskaper har då dessa tillstånd? För de koherenta tillstånden gäller

$$\frac{1}{2\pi} \iint dx_0\, dp_0\, |x_0, p_0\rangle \langle x_0, p_0| = \mathbb{1}, \tag{4.24}$$

där integrationen är över hela x_0p_0-planet. Detta kommer man fram till genom att använda uttrycket (4.20) för $|z\rangle = |x_0, p_0\rangle$, utföra integrationen och sedan utnyttja det faktum att tillstånden (4.14) utgör en fullständig bas enligt (4.15). Denna räkning kräver en del utrymme och visas därför explicit i Appendix A.4.

De koherenta tillstånden utgör en överkomplett bas, då de inte är ortogonala. Vi har

$$\langle x_0, p_0 |\, x_0', p_0' \rangle = e^{-[(x_0 - x_0')^2 + (p_0 - p_0')^2]/4 + i(x_0 p_0' - x_0' p_0)/2}. \tag{4.25}$$

Detta ger att

$$\langle x_0, p_0 |\, x_0, p_0 \rangle = 1, \tag{4.26}$$

men $\langle x_0, p_0 |\, x_0', p_0' \rangle \neq 0$ då $x_0 \neq x_0'$, $p_0 \neq p_0'$. Vi ser däremot i ekvation (4.25) att då avståndet mellan punkterna (x_0, p_0) och (x_0', p_0') ökar, går den inre produkten $\langle x_0, p_0 |\, x_0', p_0' \rangle$ snabbt mot noll. Att de koherenta tillstånden är överkompletta innebär att om man väljer ut en del av dem skulle dessa ändå kunna bilda en fullständig bas, vilket vi återkommer till i avsnitt 6.

Så vad har koordinaterna x_0 och p_0 med position och rörelsemängd att göra? Vi börjar med att titta på hur operatorerna $\hat{U}(x_0, p_0)$ verkar på en funktion $f(x)$. Om vi återigen utnyttjar Baker-Hausdorffs formel (3.2) på sida 11 får vi

$$e^{i(p_0\hat{x}-x_0\hat{p})} = e^{-ix_0p_0/2}e^{ip_0\hat{x}}e^{-ix_0\hat{p}}. \tag{4.27}$$

I x-representationen utförs således först en förflyttning i x-koordinaten, och sedan läggs en fasfaktor till, så att

$$\hat{U}(x_0, p_0)f(x) = e^{ip_0(x-x_0/2)}f(x - x_0). \tag{4.28}$$

Operatorn $\hat{U}$ är alltså en translationsoperator, liksom operatorn $\hat{T}(a)$ som vi bekantade oss med i avsnitt 2.1. Nu är vi nyfikna på hur tillstånden $|x_0, p_0\rangle$ ser ut i x-representationen. Vi får

$$\langle x|\, x_0, p_0\rangle = \langle x|\, \hat{U}(x_0, p_0)\, |0\rangle \tag{4.29}$$

$$= e^{ip_0(x-x_0/2)}\, \langle x - x_0|\, 0\rangle. \tag{4.30}$$

I Appendix A.5 visas att

$$\langle x|\, 0\rangle = \pi^{-1/4}e^{-x^2/2}, \tag{4.31}$$

och vi får

$$\langle x|\, x_0, p_0\rangle = \pi^{-1/4}e^{-(x-x_0)^2/2+ip_0(x-x_0/2)}. \tag{4.32}$$

Detta ger sannolikheten att mäta partikeln i positionen x:

$$|\langle x|\, x_0, p_0\rangle|^2 = \pi^{-1/2}e^{-(x-x_0)^2}. \tag{4.33}$$

Detta är en Gausskurva centrerad kring $x = x_0$. Upprepade positionsmätningar av ett sådant tillstånd ger alltså värden normalfördelade kring x_0, och på så sätt definieras positionen utifrån koordinaten x_0. Därför kan vi göra analogin med det klassiska fasrummet.

Låt oss nu titta på Heisenbergs osäkerhetsrelation. Utifrån uttrycket (4.20) för ett koherent tillstånd kan vi räkna ut väntevärdet av $\hat{x}$ och $\hat{x}^2$ genom att skriva om dessa uttryckt i förintelse- och skapelseoperatorerna och använda att deras verkan på tillstånden $|n\rangle$ ges av ekvationerna (4.17) och (4.18), samt utnyttja ortogonaliteten (4.16). Detta ger

$$\langle \hat{x}\rangle = \langle x_0, p_0|\, \hat{x}\, |x_0, p_0\rangle = x_0, \tag{4.34}$$

$$\left\langle \hat{x}^2\right\rangle = \langle x_0, p_0|\, \hat{x}^2\, |x_0, p_0\rangle = x_0^2 + \frac{1}{2}. \tag{4.35}$$

Den senare räkningen visas mer explicit i Appendix A.6. För ett koherent tillstånd får vi då

$$(\Delta x)^2 = \left\langle \hat{x}^2\right\rangle - \langle \hat{x}\rangle^2 = \frac{1}{2}. \tag{4.36}$$

En motsvarande uträkning med $\hat{p}$-operatorn ger samma resultat, $(\Delta p)^2 = 1/2$, och av det följer $\Delta x \Delta p = 1/2$. Att de koherenta tillstånden ger minsta möjliga osäkerhet i bestämningen av position och rörelsemängd innebär att dessa tillstånd kan sägas vara de mest "klassiska" tillstånd vi har. Enligt samma logik skulle man kunna säga att Zaktillstånden $|q,k\rangle$ är maximalt "kvantmekaniska", i och med att vi över huvud taget inte har någon gräns för inom vilket intervall position eller rörelsemängd ligger, trots att vi känner till koordinaterna q och k som definierar tillståndet.

5 En jämförelse mellan Zaktillstånd och koherenta tillstånd

Vi har redan snuddat vid likheterna mellan Zaktillstånden och de koherenta tillstånden. Ett vaket öga har kunnat lägga märke till att de operatorer vi använde oss av för att bygga upp basen $|q,k\rangle$ är specialfall av de operatorer $\hat{U}(x_0,p_0)$ som skapar de koherenta tillstånden $|x_0,p_0\rangle$.

Som vi såg i avsnitt 4.2 är operatorerna $\hat{U}(x_0,p_0)$ translationsoperatorer. Vid närmare eftertanke ser vi att de operatorer vi tidigare arbetat med inte är något annat än just

$$\hat{T}(a) = \hat{U}(-a,0) \tag{5.1}$$

$$\hat{S}(b) = \hat{U}(0,b). \tag{5.2}$$

Omvänt kan operatorn $\hat{U}(x_0,p_0)$ uttryckas i operatorerna $\hat{T}$ och $\hat{S}$. Vi kan skriva om ekvation (4.27) som

$$\begin{aligned}\hat{U}(x_0,p_0) &= e^{-ix_0p_0/2}\hat{S}(p_0)\hat{T}(-x_0)\\ &= e^{ix_0p_0/2}\hat{T}(-x_0)\hat{S}(p_0).\end{aligned} \tag{5.3}$$

Vi är nu rustade för att titta på hur Zakfunktionerna $\varphi(q,k)$ är uppbyggda. I avsnitt 3.2 ville vi ta reda på hur dessa funktioner, som är egenfunktioner till såväl operatorn $\hat{T}(a)$ som operatorn $\hat{S}(b)$, ser ut, och kom fram till uttrycket (3.16) för funktionerna $\varphi(q,k)$. Vi har även sett att dessa operatorer är specialfall av $\hat{U}$-operatorn. Nu tittar vi på hur Zaktillstånden är uppbyggda av likartade operatorer [5]. Vi har

$$\begin{aligned}|q,k\rangle &= \frac{1}{\sqrt{b}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{ikna}\,|q+na\rangle\\ &= \hat{T}(-q)\frac{1}{\sqrt{b}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{ikna}\,|na\rangle\\ &= \hat{T}(-q)\hat{S}(k)\frac{1}{\sqrt{b}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|na\rangle\\ &= e^{-iqk/2}\hat{U}(q,k)\,|0,0\rangle\,.\end{aligned} \tag{5.4}$$

I sista steget har relation (5.3) använts. Helt analogt har vi

$$|q,k) = e^{iqk/2}\hat{U}(q,k)\,|0,0)\,. \tag{5.5}$$

Skillnaden i fas mellan uttrycken (5.4) och (5.5) är en konsekvens av den fas som förekommer i (5.3). Vi ser nu att fasskillnaden mellan tillstånden $|q,k\rangle$ och $|q,k)$ i ekvation (3.28) på sida 15 har samma ursprung.

Enligt ekvation (3.28) gäller $|0,0\rangle = |0,0)$. Detta är vårt motsvarande vakuumtillstånd. Zaktillstånden kan således liknas vid de koherenta tillstånden, i den mening att de skapas av operatorn $\hat{U}$ utifrån ett definierat vakuumtillstånd.

6 Koherenta tillstånd på ett gitter i fasrummet

Låt oss nu återkomma till de koherenta tillstånd som studerades i avsnitt 4. Där konstaterades att dessa utgör en överkomplett bas. Antag att vi nu vill välja ut ett antal punkter i x_0p_0-planet, som definierar en uppsättning tillstånd som tillsammans utgör en fullständig bas.

Bacry m fl. [8] visar med hjälp av Zakrepresentationen att om punkterna (x_0, p_0) väljs så att dessa befinner sig på ett gitter, $x_0 = na$, $p_0 = mb$ för alla heltal n, m, så utgör de koherenta tillstånden $|z_{mn}\rangle$, $z_{mn} = \frac{1}{\sqrt{2}}(na + imb)$, en fullständig bas om $ab = 2\pi$.

Låt ϕ vara ett godtyckligt tillstånd och betrakta nu den uppsättning tillstånd som ges av

$$\phi_{mn} = e^{i(mb\hat{x} - na\hat{p})}\phi = (-1)^{mn} e^{imb\hat{x}} e^{-ina\hat{p}}\phi. \tag{6.1}$$

Då $ab = 2\pi$ kommuterar de två operatorerna $e^{imb\hat{x}}$ och $e^{-ina\hat{p}}$. Vi ser till och med att dessa inte är något annat än just operatorerna $\hat{S}(mb)$ och $\hat{T}(-na)$. Det faller sig därför naturligt att uttrycka tillstånden ϕ_{mn} i Zakbaserna, då motsvarande egenvärden till ovan nämnda operatorer är e^{imbq} respektive e^{-inak} i denna bas. Vi har

$$\phi_{mn}(q,k) = (-1)^{mn} e^{i(mbq - nak)}\phi(q,k). \tag{6.2}$$

Antag nu att det finns en funktion $\chi(q,k)$ ortogonal mot funktionerna $\phi_{mn}(q,k)$, så att

$$(-1)^{mn} c_{mn} \equiv \iint_{\tau(a)} dq\, dk\, \chi^*(q,k)(-1)^{mn} e^{i(mbq - nak)}\phi(q,k) = 0, \tag{6.3}$$

där c_{mn} är Fourierkoefficienterna till funktionen $\chi^*(q,k)\phi(q,k)$ uttryckt som en Fourierserie:

$$\chi^*(q,k)\phi(q,k) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} c_{mn} e^{-imbq} e^{inak}. \tag{6.4}$$

Om dessa alla är lika med noll följer att

$$\chi^*(q,k)\phi(q,k) = 0. \tag{6.5}$$

Låter vi ϕ vara lika med vakuumtillståndet, ges de koherenta tillstånden på gittret av just ekvation (6.1) enligt definitionen. Med hjälp av ekvationerna

(3.17) på sida 13 och (4.31) på sida 19 kan vi ta reda på hur $\phi(q,k) = \langle q,k|\,0\rangle$ ser ut:

$$\begin{aligned}\phi(q,k) &= \langle q,k|\,0\rangle && (6.6)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\langle q,k|\,x\rangle\,\langle x|\,0\rangle && (6.7)\\ &= \frac{1}{\pi^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{b}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} e^{-ikla}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\delta(x-q-la)e^{-x^2/2} && (6.8)\\ &= \frac{1}{\pi^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{b}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} e^{-ikla}e^{-(q+la)^2/2}. && (6.9)\end{aligned}$$

Denna funktion är endast lika med noll i punkten $(q,k) = (a/2, b/2)$. Enligt ekvation (6.5) måste därför $\chi(q,k)$ vara lika med noll. Det existerar alltså inte någon funktion ortogonal mot uppsättningen ϕ_{mn}. Därmed har visats att tillstånden

$$\phi_{mn}(q,k) = \frac{1}{\pi^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{b}}e^{i(mbq-nak)}\sum_{l} e^{-ikla}e^{-(q+la)^2/2} \tag{6.10}$$

utgör en fullständig bas.

Med hjälp av Zakrepresentationen har vi nu visat att dessa koherenta tillstånd på ett gitter i fasrummet utgör en fullständig bas. Beviset är betydligt mindre komplicerat än tidigare bevis av exempelvis Bargmann m fl. [9].

Förutom att Zakrepresentationen kan vara ett kraftfullt verktyg, som i exemplet ovan, är det en fascinerande representation inom kvantmekaniken. Vi har sett att en uppsättning tillstånd som beskrivs av punkter på en torus utgör en bas i samma Hilbertrum som en annan uppsättning bastillstånd som beskrivs av punkter på den reella tallinjen. Beviset, som här har presenterats, är konkret och kan härledas helt utifrån en enda ekvation, nämligen ekvation (3.15) på sida 13.

A Appendix

A.1 Osäkerhetsrelationen

Vi ska här visa att

$$\langle(\hat{\Delta A})^2\rangle\langle(\hat{\Delta B})^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle|^2, \tag{A.1}$$

där operatorerna $\hat{\Delta A}$ och $\hat{\Delta B}$ är desamma som de vi definierade i avsnitt 1.4. Beviset följer det som är beskrivet av Sakurai [10].

Till att börja med behöver vi tre hjälpsatser. Den första är Schwarz olikhet

$$\langle\alpha|\,\alpha\rangle\,\langle\beta|\,\beta\rangle \geq |\,\langle\alpha|\,\beta\rangle|^2, \tag{A.2}$$

där $|\alpha\rangle$ och $|\beta\rangle$ är två godtyckliga tillstånd. För ett godtyckligt tillstånd $|\gamma\rangle$ gäller alltid $\langle\gamma|\,\gamma\rangle \geq 0$. Med $|\gamma\rangle = |\alpha\rangle + \lambda\,|\beta\rangle$, där λ är något komplext tal, får vi då

$$(\langle\alpha| + \lambda^* \langle\beta|)(|\alpha\rangle + \lambda\,|\beta\rangle) \geq 0. \tag{A.3}$$

Särskilt gäller ekvation (A.3) med $\lambda = -\langle\beta|\,\alpha\rangle / \langle\beta|\,\beta\rangle$, vilket ger ekvation (A.2).

Den andra hjälpsatsen vi behöver säger att väntevärdet för en hermitsk operator alltid är reellt. Beviset är enkelt, då

$$\langle\hat{A}\rangle = \langle\hat{A}^\dagger\rangle^* = \langle\hat{A}\rangle^*. \tag{A.4}$$

Sista steget gäller om operatorn $\hat{A}$ är hermitsk. Väntevärdet är alltså lika med sitt komplexa konjugat, vilket innebär att det är reellt.

Den tredje hjälpsatsen säger att väntevärdet av en antihermitsk operator, för vilken gäller att $\hat{C} = -\hat{C}^\dagger$, alltid är rent imaginärt. Beviset är snarlikt det ovan. Vi har

$$\langle\hat{C}\rangle = \langle\hat{C}^\dagger\rangle^* = -\langle\hat{C}\rangle^*, \tag{A.5}$$

vilket innebär att $\langle\hat{C}\rangle$ är rent imaginär.

Låt oss nu bevisa ekvation (A.1). Vi utnyttjar ekvation (A.2) med $|\alpha\rangle = \hat{\Delta A}\,|\,\rangle$, $|\beta\rangle = \hat{\Delta B}\,|\,\rangle$, där $|\,\rangle$ betecknar något godtyckligt tiilstånd. Detta ger

$$\langle(\hat{\Delta A})^2\rangle\langle(\hat{\Delta B})^2\rangle \geq |\langle\hat{\Delta A}\hat{\Delta B}\rangle|^2. \tag{A.6}$$

Nu har vi att

$$\hat{\Delta A}\hat{\Delta B} = \frac{1}{2}[\hat{\Delta A}, \hat{\Delta B}] + \frac{1}{2}\{\hat{\Delta A}, \hat{\Delta B}\}, \tag{A.7}$$

där klammerparenteserna betecknar antikommutatorn $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$. Vi ser även att

$$[\hat{\Delta A}, \hat{\Delta B}] = [\hat{A}, \hat{B}], \tag{A.8}$$

utifrån definitionerna av operatorerna $\hat{\Delta A}$ och $\hat{\Delta B}$. Denna kommutator är antihermitsk, vilket enkelt kan kontrolleras. Det innebär att väntevärdet av kommutatorn $[\hat{\Delta A}, \hat{\Delta B}]$ är rent imaginärt. Antikommutatorn $\{\hat{\Delta A}, \hat{\Delta B}\}$ är däremot hermitsk, vilket innebär att dess väntevärde är reellt. Enligt ekvation (A.7) har vi då

$$\langle\hat{\Delta A}\hat{\Delta B}\rangle = \frac{1}{2}\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle + \frac{1}{2}\langle\{\hat{\Delta A}, \hat{\Delta B}\}\rangle, \tag{A.9}$$

där den första termen är rent imaginär och den andra termen reell. Detta ger

$$|\langle\hat{\Delta A}\hat{\Delta B}\rangle|^2 = \frac{1}{4}|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle\{\hat{\Delta A}, \hat{\Delta B}\}\rangle|^2. \tag{A.10}$$

Det vill säga

$$|\langle\hat{\Delta A}\hat{\Delta B}\rangle|^2 \geq \frac{1}{4}|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle|^2, \tag{A.11}$$

vilket tillsammans med ekvation (A.6) visar olikheten (A.1).

A.2 Baker-Hausdorffs formel

Enligt Baker-Hausdorffs formel gäller

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{[\hat{A},\hat{B}]}e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}, \tag{A.12}$$

där operatorerna $\hat{A}$ och $\hat{B}$ är sådana att dessa båda kommuterar med kommutatorn $[\hat{A}, \hat{B}]$. Vi ska här visa detta genom en metod som beskrivs av Glauber [11]. Börja med att definiera funktionerna $f(t)$ och $g(t)$ som nedan

$$\begin{cases} f(t) = e^{t\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-t\hat{A}} \\ g(t) = e^{t[\hat{A},\hat{B}]}e^{\hat{B}} \end{cases} . \tag{A.13}$$

Vi ska nu visa ekvation (A.12) genom att visa att funktionerna $f(t)$ och $g(t)$ löser samma differentialekvation. Till att börja med har vi

$$\frac{dg}{dt} = [\hat{A}, \hat{B}]e^{t[\hat{A},\hat{B}]}e^{\hat{B}} = [\hat{A}, \hat{B}]g(t). \tag{A.14}$$

Derivering av $f(t)$ ger

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= e^{t\hat{A}}\hat{A}e^{\hat{B}}e^{-t\hat{A}} - e^{t\hat{A}}e^{\hat{B}}\hat{A}e^{-t\hat{A}} \\ &= e^{t\hat{A}}[\hat{A}, e^{\hat{B}}]e^{-t\hat{A}}. \end{aligned} \tag{A.15}$$

Låt oss titta närmare på kommutatorn $[\hat{A}, e^{\hat{B}}]$. Vi har

$$e^{\hat{B}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{B}^n}{n!}, \tag{A.16}$$

vilket ger

$$[\hat{A}, e^{\hat{B}}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[\hat{A}, \hat{B}^n]. \tag{A.17}$$

Genom att utnyttja kommutatorregeln

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}], \tag{A.18}$$

för godtyckliga operatorer $\hat{A}$, $\hat{B}$ och $\hat{C}$, samt att operatorn $\hat{B}$ kommuterar med $[\hat{A}, \hat{B}]$ har vi

$$[\hat{A}, \hat{B}^2] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{B}] = 2[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}. \tag{A.19}$$

Enligt samma procedur kan vi fortsätta analysera kommutatorerna $[\hat{A}, \hat{B}^3]$, $[\hat{A}, \hat{B}^4]$ o.s.v., genom upprepad användning av ekvation (A.18), och ser att generellt gäller

$$[\hat{A}, \hat{B}^n] = n[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{A.20}$$

Sätter vi nu in ovanstående resultat i ekvation (A.17) får vi

$$\begin{aligned}
[\hat{A}, e^{\hat{B}}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!}[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n} \\
&= [\hat{A}, \hat{B}]e^{\hat{B}}.
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Slutligen ger då insättning i ekvation (A.15)

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &= e^{t\hat{A}}[\hat{A}, \hat{B}]e^{\hat{B}}e^{-t\hat{A}} \\
&= [\hat{A}, \hat{B}]e^{t\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-t\hat{A}} \\
&= [\hat{A}, \hat{B}]f(t),
\end{aligned} \tag{A.22}$$

då $\hat{A}$ kommuterar med $[\hat{A}, \hat{B}]$. Vi har nu visat att

$$\begin{cases} \frac{df}{dt} = [\hat{A}, \hat{B}]f(t) \\ \frac{dg}{dt} = [\hat{A}, \hat{B}]g(t) \end{cases} \tag{A.23}$$

och tillsammans med begynnelsevillkoret $f(0) = g(0)$ har därmed visats att $f(t) = g(t)$ och ekvation (A.12) gäller.

På samma sätt kan visas att $e^{t\hat{A}}e^{t\hat{B}} = e^{t^2[\hat{A},\hat{B}]/2}e^{t(\hat{A}+\hat{B})}$.

A.3 Diracs deltafunktion

A.3.1 Bevis av ekvation (3.21)

I avsnitt 3.3 påstås att

$$\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x') = -\frac{\partial}{\partial x'}\delta(x-x'). \tag{A.24}$$

Detta vill säga att för två funktioner $f(x)$ och $g(x)$ gäller

$$\iint dx\, dx'\, f(x)g(x')\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x') = -\iint dx\, dx'\, f(x)g(x')\frac{\partial}{\partial x'}\delta(x-x'). \tag{A.25}$$

Vi kommer se att för att detta ska gälla måste vi lägga kravet på funktionerna $f(x)$ och $g(x)$ att

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0. \tag{A.26}$$

Låt oss börja med vänsterledet i ekvation (A.25) genom att utföra en partiell integration i x:

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, dx' f(x) g(x') \frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x') \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx' g(x') \left([f(x)\delta(x-x')]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{df}{dx}\delta(x-x') \right).
\end{aligned}
\tag{A.27}
$$

Av kravet (A.26) på funktionen $f(x)$ följer

$$
[f(x)\delta(x-x')]_{-\infty}^{\infty} = 0,
\tag{A.28}
$$

och vi får då

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, dx' f(x) g(x') \frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x') \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, dx' \frac{df}{dx} g(x')\delta(x-x') \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{df}{dx} g(x).
\end{aligned}
\tag{A.29}
$$

Enligt samma procedur, med partiell integration i x', får vi för högerledet

$$
-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, dx' f(x) g(x') \frac{\partial}{\partial x'}\delta(x-x') = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) \frac{dg}{dx}.
\tag{A.30}
$$

Genom ytterligare en partiell integration visas att

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) \frac{dg}{dx} = -\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{df}{dx} g(x),
\tag{A.31}
$$

och därmed har likhet mellan höger- och vänsterled i ekvation (A.25) visats.

A.3.2 Bevis av ekvation (3.27)

Här vill vi visa att

$$
\delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x), \qquad c \neq 0,
\tag{A.32}
$$

det vill säga att

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\delta(cx) = \frac{1}{|c|}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\delta(x).
\tag{A.33}
$$

Låt nu $y \equiv cx$, så att $dx = \frac{1}{c}dy$. För $c > 0$ har vi

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\delta(cx) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y/c)\delta(y) = \frac{1}{c} f(0).
\tag{A.34}
$$

För $c < 0$ har vi

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\delta(cx) &= \frac{1}{c}\int_{\infty}^{-\infty} dy\, f(y/c)\delta(y) \\ &= -\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y/c)\delta(y) \\ &= -\frac{1}{c} f(0). \end{aligned} \tag{A.35}$$

I båda fallen gäller

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\delta(cx) = \frac{1}{|c|} f(0) = \frac{1}{|c|}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\delta(x). \tag{A.36}$$

Därmed är beviset klart.

A.4 De koherenta tillstånden som överkomplett bas

Vi börjar här med att visa att

$$\frac{1}{2\pi}\iint dx_0\, dp_0 \left|x_0, p_0\right\rangle \left\langle x_0, p_0\right| = \mathbb{1}. \tag{A.37}$$

Från ekvation (4.20) har vi

$$\left|x_0, p_0\right\rangle = e^{-(x_0^2+p_0^2)/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} (x_0 + ip_0)^n \left|n\right\rangle. \tag{A.38}$$

Detta ger att vänsterledet i ekvation (A.37) är lika med

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left|n\right\rangle \left\langle m\right|}{\sqrt{2^{n+m} n! m!}} \iint dx_0\, dp_0 e^{-(x_0^2+p_0^2)/2} (x_0 + ip_0)^n (x_0 - ip_0)^m, \tag{A.39}$$

där integrationen är över hela x_0p_0-planet. Nu gör vi variabelsubstitutionen $x_0 = r\cos\theta$, $p_0 = r\sin\theta$, vilket ger

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left|n\right\rangle \left\langle m\right|}{\sqrt{2^{n+m} n! m!}} \iint_{\substack{0\leq r\leq\infty \\ 0\leq\theta\leq 2\pi}} dr\, d\theta\, e^{-r^2/2} r^{n+m+1} e^{i(n-m)\theta}. \tag{A.40}$$

Integrationen över θ ger

$$\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{i(n-m)\theta} = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 2\pi & n = m \end{cases}. \tag{A.41}$$

Så vi har kvar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \left|n\right\rangle \left\langle n\right| \int_0^{\infty} dr\, r^{2n+1} e^{-r^2/2}. \tag{A.42}$$

För integralen över r har vi

$$\int_0^\infty dr\, r^{2n+1} e^{-r^2/2} = 2^n \Gamma(n+1), \tag{A.43}$$

där $\Gamma(n)$ är gammafunktionen, vilken definieras av

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty dt\, t^{n-1} e^{-t}, \tag{A.44}$$

för positiva reella n. Då n är ett positivt heltal gäller $\Gamma(n+1) = n!$, vilket ger

$$\int_0^\infty dr\, r^{2n+1} e^{-r^2/2} = 2^n n!. \tag{A.45}$$

Insättning av ovanstående i ekvation (A.42) ger slutligen

$$\frac{1}{2\pi} \iint dx_0\, dp_0 \left| x_0, p_0 \right\rangle \left\langle x_0, p_0 \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| n \right\rangle \left\langle n \right| = \mathbb{1}, \tag{A.46}$$

då tillstånden $|n\rangle$ utgör en fullständig bas. Därmed är ekvation (A.37) visad.

Däremot är inte de koherenta tillstånden ortogonala. Vi har

$$\begin{aligned} \langle z | \, z' \rangle &= e^{-(|z|^2+|z'|^2)/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{*m} z'^n}{\sqrt{m!n!}} \langle m | \, n \rangle \\ &= e^{-(|z|^2+|z'|^2)/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^* z')^n}{n!} \\ &= e^{-(|z|^2+|z'|^2)/2} e^{z^* z'}. \end{aligned} \tag{A.47}$$

Eller uttryckt i koordinaterna x_0 och p_0:

$$\langle x_0, p_0 | \, x_0', p_0' \rangle = e^{-[(x_0 - x_0')^2 + (p_0 - p_0')^2]/4 + i(x_0 p_0' - x_0' p_0)/2}. \tag{A.48}$$

A.5 Vakuumtillståndet i x-representationen

Här ska vi visa hur man kommer fram till uttrycket för funktionen $\langle x | \, 0 \rangle$, låt oss kalla denna $\psi_0(x) \equiv \langle x | \, 0 \rangle$, där vakuumtillståndet $|0\rangle$ definieras som det tillstånd för vilket gäller

$$\hat{a} \left| 0 \right\rangle = 0. \tag{A.49}$$

Villkoret ovan ger

$$\hat{a} \psi_0(x) = 0. \tag{A.50}$$

Förintelseoperatorn $\hat{a}$ ges i x-representationen av

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + \frac{d}{dx}). \tag{A.51}$$

Detta ger differentialekvationen

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x\psi_0(x) + \frac{d\psi_0}{dx}) = 0, \tag{A.52}$$

vilken har lösningen

$$\psi_0(x) = Ae^{-x^2/2}, \tag{A.53}$$

där A är någon normeringskonstant. Kräver vi att $\psi_0(x)$ ska vara normerat, dvs att $\langle\psi_0|\,\psi_0\rangle = 1$, får vi

$$\psi_0(x) = \pi^{-1/4}e^{-x^2/2}. \tag{A.54}$$

A.6 Väntevärdet av $\hat{x}^2$ för koherenta tillstånd

Operatorn $\hat{x}$ kan uttryckas i skapelse- och förintelseoperatorerna. Vi har enligt ekvation (4.2)

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \tag{A.55}$$

Detta ger

$$\hat{x}^2 = \frac{1}{2}(\hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2}). \tag{A.56}$$

Då de koherenta tillstånden är egentillstånd till förintelseoperatorn, enligt ekvation (4.1), får vi direkt

$$\langle z|\,\hat{a}^2\,|z\rangle = z^2\,\langle z|\,z\rangle = z^2, \tag{A.57}$$

då $\langle z|\,z\rangle = 1$ enligt ekvation (4.26) på sida 18. Enligt uttrycket (4.20) för tillståndet $|z\rangle$ har vi vidare

$$\langle z|\,\hat{a}\hat{a}^\dagger\,|z\rangle = e^{-|z|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{*m}z^n}{\sqrt{m!n!}}\,\langle m|\,\hat{a}\hat{a}^\dagger\,|n\rangle\,. \tag{A.58}$$

Utnyttjar vi nu skapelse- och förintelseoperatorernas verkan på tillståndet $|n\rangle$ får vi

$$\begin{aligned}\langle z|\,\hat{a}\hat{a}^\dagger\,|z\rangle &= e^{-|z|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{n+1}\frac{z^{*m}z^n}{\sqrt{m!n!}}\,\langle m|\,\hat{a}\,|n+1\rangle \\ &= e^{-|z|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(n+1)\frac{z^{*m}z^n}{\sqrt{m!n!}}\,\langle m|\,n\rangle \\ &= e^{-|z|^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{|z|^{2n}}{n!}.\end{aligned} \tag{A.59}$$

Nu delar vi upp summan i två och utnyttjar att $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Det ger

$$
\begin{aligned}
\langle z| \hat{a}\hat{a}^\dagger |z\rangle &= e^{-|z|^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{|z|^{2n}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{n!} \right] \\
&= e^{-|z|^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{(n-1)!} + e^{|z|^2} \right] \\
&= e^{-|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n+2}}{n!} + 1 \\
&= |z|^2 + 1. \qquad \text{(A.60)}
\end{aligned}
$$

Likartade räkningar ger

$$
\begin{aligned}
\langle z| \hat{a}^\dagger \hat{a} |z\rangle &= |z|^2, \qquad \text{(A.61)} \\
\langle z| \hat{a}^{\dagger 2} |z\rangle &= z^{*2}. \qquad \text{(A.62)}
\end{aligned}
$$

Slutligen har vi då

$$
\begin{aligned}
\langle z| \hat{x}^2 |z\rangle &= \frac{1}{2} \langle z| \hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2} |z\rangle \\
&= \frac{1}{2}(2|z|^2 + z^2 + z^{*2} + 1) \\
&= x_0^2 + \frac{1}{2}, \qquad \text{(A.63)}
\end{aligned}
$$

vilket är vad vi ville visa.

Referenser

[1] J. Zak, Phys. Rev. Lett. **19**, 1385 (1967).

[2] J. Zak, Phys. Rev. **168**, 686 (1968).

[3] J. Zak, The kq-Representation in the Dynamics of Electrons in Solids, in H. Ehrenreich, F. Seitz och D. Turnbull (Eds.) *Solid State Physics*, Academic Press, New York (1972), Vol. 27, p.1.

[4] G. Lindblad, *Symmetries in Physics*, Lecture Notes

[5] Arvind, S. Chaturvedi, N. Mukunda, R. Simon, *The Sampling Theorem and Coherent State Systems in Quantum Mechanics*, arXiv:quant-ph/0601059v1.

[6] U. Leonhardt, *Measuring the Quantum State of Light*, Cambridge University Press (1997)

[7] I. Bengtsson and K. Życzowski, *Geometry of Quantum States*, Cambridge University Press (2006)

[8] H. Bacry, A. Grossman and J. Zak, Phys. Rev. B **12**, 1118 (1975)

[9] V. Bargmann, P. Butera, L. Girardello and J. R. Klauder, Rep. on Math. Phys. **2**, 221 (1971)

[10] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company (1994)

[11] R. J. Glauber, Phys. Rev. **84**, 395 (1951)